入 学 試 験 問 題　前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 29 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。
また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

kを実数とし，座標平面上で次の2つの放物線C, Dの共通接線について考える。

$$C:\quad y = x^2 + k$$
$$D:\quad x = y^2 + k$$

(1) 直線$y = ax + b$が共通接線であるとき，aを用いてkとbを表せ。ただし$a \neq -1$とする。

(2) 傾きが2の共通接線が存在するようにkの値を定める。このとき，共通接線が3本存在することを示し，それらの傾きとy切片を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第 6 問

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）