

[数学 1]

以下の設問に答えよ.

問 1. 0 以上の整数 n に対して,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad (1)$$

と置く. I_n の満たす漸化式を導くことにより積分 I_n の値を求めよ.

問 2. 以下の積分を求めよ. ただし m, n は 0 以上の整数である.

(a)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \quad (2)$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx \quad (3)$$

問 3. 問 1 の結果を用いて以下の式を証明せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi} \quad (4)$$

問 4. 以下の級数 a_n は $n \rightarrow \infty$ で 0 ではない定数 A に収束する. このとき, 式 (4) を用いて定数 A が $\sqrt{2\pi}$ であることを示せ.

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \quad (5)$$