

入学試験問題

数学(理科)



(配点 120 点)

令和 6 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

座標空間内の点 $A(0, -1, 1)$ をとる。 xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i) P は原点 O と異なる。

$$(ii) \angle AOP \geq \frac{2}{3}\pi$$

$$(iii) \angle OAP \leq \frac{\pi}{6}$$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2} dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

- (1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で, $f'(\tan \alpha) = 0$ となるものを求めよ。
- (2) (1) で求めた α に対し, $\tan \alpha$ の値を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば, $0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に, P は点 $(2, 1)$ にいる。

(ii) ある時刻で P が点 (a, b) にいるとき, その 1 秒後には P は

- 確率 $\frac{1}{3}$ で x 軸に関して (a, b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸に関して (a, b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y = x$ に関して (a, b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y = -x$ に関して (a, b) と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし, (1) については, 結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2, 1)$ にいる確率と, 最初から n 秒後に P が点 $(-2, -1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2, 1)$ にいる確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく。 $0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し、座標平面上の点 $(t, f(t))$ を通り、この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち、 x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

- (1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t), 0)$ 、半径を $r(t)$ とおく。 $c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。
- (2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3, a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

2 以上の整数で、1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$ とする。 $f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。
- (2) a, b を整数の定数とし、 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。 $g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)